Vozes entusiastas de jovens matemáticos

Diana F. Steele

Para este número seleccionámos um artigo de Diana Steele, originalmente publicado na revista Teaching Children Mathematics de Março de 2000. A sua autora ensina na Northern Illinois University e relata neste trabalho uma experiência que viveu na dupla qualidade de professora e investigadora. Assim, este artigo apresenta e discute alguns episódios de sala de aula, com alunos do ensino básico, ilustrando como estes se podem envolver em raciocínio matemático, tal como fazem os matemáticos, formulando conjecturas, testando-as, apresentando argumentos e reflectindo sobre o seu próprio pensamento.

Os alunos devem valorizar o papel da matemática nas suas vidas, tornar-se confiantes nas suas capacidades de resolver problemas e aprender a raciocinar e a comunicar as suas ideias matemáticas (NCTM, 1989). A utilização destas capacidades matemáticas proporciona aos alunos experiências escolares que se aproximam das experiências dos matemáticos. Tais experiências ajudam os alunos a aprender o que significa saber matemática como uma disciplina científica, à medida que constroem activamente o seu conhecimento e desenvolvem os seus conceitos matemáticos.

Para perceber de que maneira as crianças pensam como matemáticos, observei várias aulas dos primeiros anos de escolaridade, como professora e investigadora (Steele, 1995). Fiquei particularmente interessada numa turma do quarto ano. Nesta turma os alunos revelaram características semelhantes às dos matemáticos quando estes descobrem ideias matemáticas novas. Estes alunos formularam conjecturas e apresentaram os seus pontos de vista para convencer os colegas da sua validade. Eles identificaram padrões e relações à medida que procuraram sentido para as situações matemáticas. Reflectiram sobre o seu pensamento, especularam acerca das ideias matemáticas e retiraram as conclusões lógicas. Os alunos analisaram e justificaram as soluções dos problemas e expandiram o seu pensamento a níveis mais elevados para generalizar as suas soluções a novos problemas. Este artigo descreve a forma como estes alunos do quarto ano pensaram de modo semelhante ao dos matemáticos e ilustra o seu pensamento através de alguns episódios de aula.

A clarificação de questões e a representação de ideias

O primeiro episódio mostra alunos a explicar as suas ideias matemáticas e a utilizar representações visuais para ajudar os colegas a compreender o seu pensamento. Hal procura clarificar as questões colocadas pelo professor. A interpretação do que é pedido no problema é um atributo importante do trabalho de um matemático. Os matemáticos clarificam as questões e reformulam os problemas usando as suas próprias palavras. Só depois de compreenderem o que andam à procura é que começam a responder às questões.

Professora: Podem várias circunferências ter o mesmo centro? Levantem a mão se pensam que pode existir mais do que uma circunferência com o mesmo centro. Parece que a turma está dividida.

Hal: Posso perguntar uma coisa? Se for como uma circunferência que anda à volta e tem um ponto no meio – alguém que anda à volta pode ter o mesmo centro da circunferência? [o aluno utiliza as mãos para mostrar uma circunferência orientada verticalmente e uma orientada horizontalmente].

Mesmo com problemas na formulação das suas questões, Hal mostrou claramente, com as suas mãos, que estava a falar de duas circunferências em dois planos diferentes.

Professora: É uma excelente questão e não pensei que alguém me fosse perguntar isso. Penso que ele perguntou basicamente isto... O que acontecerá se ele tivesse duas circunferências como estas...? [A professora desenhou a figura 1].

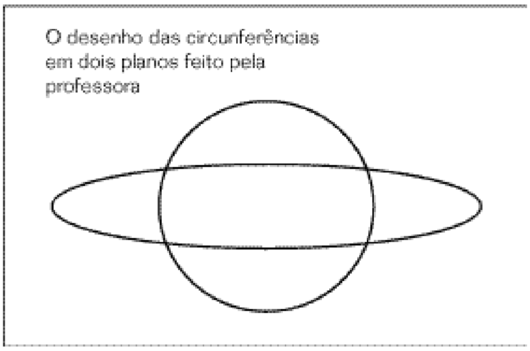

figura 1

Para se assegurar que tanto ela como os outros colegas tinham compreendido a questão de Hal, a professora ajuda-o a ilustrar o seu raciocínio; no entanto, o seu esboço não a satisfez. Em alternativa, resolveu utilizar dois elásticos, colocou-os à volta dos dedos em cada mão de modo a que coincidissem.

Professora: Certo, Hal? E o centro está no meio dela. O que ele quer saber é "o que acontece se tivermos circunferências assim como estas?"

Hal concorda que a professora está a mostrar a sua ideia. Inicialmente, alguns alunos discordam desta ideia, de que seja possível ter duas circunferências em planos diferentes. Por fim, a professora e os alunos aceitam a ideia de Hal, porque na questão não se afirmava que as circunferências deveriam estar no mesmo plano. Através da discussão da pergunta de Hal, os alunos abandonaram o pressuposto que as duas circunferências deveriam estar no mesmo plano. Os matemáticos sabem, através da experiência, que não devem fazer pressupostos infundados quando resolvem um problema.

Através do excerto seguinte, podemos ver que Hal acredita que no valor do seu pensamento. Podemos também verificar que através da ideia de Hal foi lançada a discussão.

Professora: O Hal pensou num exemplo de duas circunferências com o mesmo centro. Uma circunferência está orientada nesta direcção num plano e, a outra, nesta direcção num plano diferente.

Hal: "Saí-me com uma boa!".

Professora: Alguém pode pensar noutra possibilidade de mais do que uma circunferência ter o mesmo centro?... Eu vi alguns diagramas nos cadernos de alguns. Não tenham medo de partilhar as vossas respostas. Ann, eu vi os teus. Por favor, vem aqui e mostra a tua resposta.

A professora tinha observado o trabalho dos alunos e sabia que havia outras ideias. Ann desenhou a sua representação no quadro (ver figura 2)

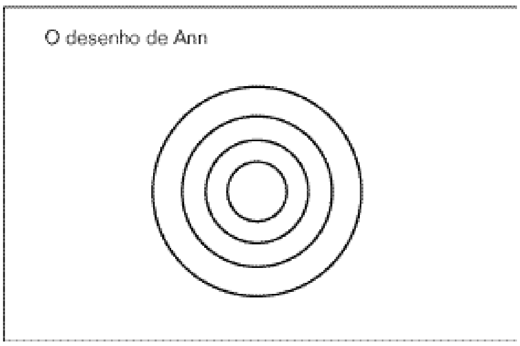

figura 2

e a professora disse, "Estas chamam-se circunferências concêntricas". Para ajudar os alunos a compreender a representação da Ann, a professora pediu a vários alunos que viessem para a frente. Colocou um dos alunos no centro e os outros deram as mãos de modo a formarem diferentes circunferências à volta do aluno que estava no centro. Depois desta demonstração, Missy teve uma nova ideia e desenhou no quadro a sua representação (ver figura 3). A professora relacionou então o pensamento dos seus alunos associando a ideia de Missy à ideia de Hal. Disse ela, "Missy está a tentar alargar a ideia de Hal; [mas] está a dizer que as circunferências não necessitam de estar em planos perpendiculares, como as do Hal". Ela está a dizer que eu posso mudar esta direcção oblíqua, mover um bocadinho e desenhar outra, e assim sucessivamente". Para uma melhor elaboração e ajudar os alunos a compreender a ideia de Missy, a professora pegou numa esfera e colocou vários elásticos à sua volta.

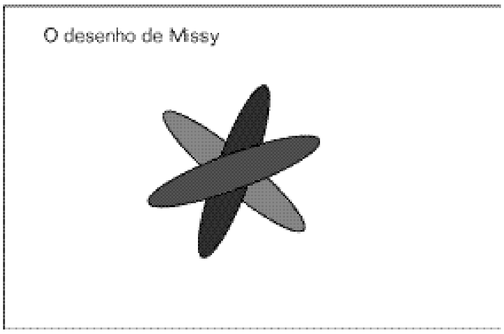

figura 3

Professora: Eu posso ter aqui uma circunferência. Outra aqui e outra aqui... todas as vezes que eu rodar a circunferência obtenho o mesmo...

Alunos: Centro.

Gerry: Pode rodar muitas vezes.

Professora: Qual é outra palavra para "muitas vezes"?

Alunos: Infinito.

Professora: Infinito. Muito bem. Aqueles que disseram, "Nenhuma circunferência pode ter o mesmo centro" vêem agora que existem várias possibilidades para que as circunferências partilhem o mesmo centro?

Este episódio mostra como os alunos partilharam as suas respostas e como as suas ideias e soluções se foram enriquecendo. Apresentaram exemplos de como mais do que uma circunferência pode ter o mesmo centro e nenhum dos exemplos veio da professora. Os alunos também tiveram oportunidades de repensar as respostas que deram ao problema original. À medida que analisaram mais profundamente as questões e deram significado ao que é pedido, eles apresentaram comportamentos de matemáticos. Os matemáticos clarificam as premissas dadas e usam múltiplas representações, incluindo diagramas, esboços, tabelas, gráficos e fórmulas para explicar e justificar as suas respostas.

Reflectindo e Expandindo o Pensamento

No próximo episódio, vamos evidenciar o desenvolvimento de hábitos de reflexão pelos alunos. A professora pede-lhes para darem exemplos de objectos da sala de aula que envolvam linhas que se intersectem. Um dos alunos indica algumas letras do alfabeto. A professora orienta a aula nesta direcção e pede aos alunos para olharem só para as letras maiúsculas do alfabeto. Ela pergunta "Que letras maiúsculas têm linhas que se intersectam?". Vários alunos escrevem no quadro as suas sugestões de letras maiúsculas com linhas que se intersectam. Indicam muitas letras – T, L, M, etc. – que eles pensavam ter linhas que se intersectam. Uma aluna, Sara, sugere R. A professora pede à Sara para ir ao quadro e escrever o seu R (ver figura 4).

Depois de uma curta discussão, os alunos decidem que estas linhas não se intersectavam porque a parte de cima do R é "curva". Jim diz "Mas se eu fizer um R como este ... [ver figura 5], [as linhas] intersectam-se". Todos concordaram. A professora diz, "O que é que vocês pensam acerca do

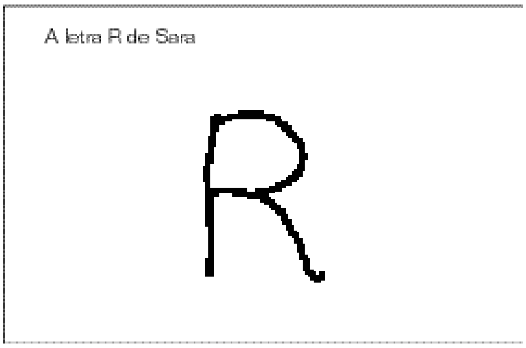

figura 4

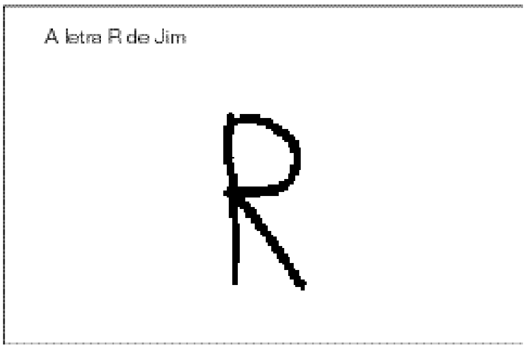

figura 5

primeiro R?" (E aponta para o R de Sara). Ninguém responde. Dá ideia que os alunos não estão prontos para pegarem na questão de saber quais destas linhas se intersectam. A professora continua sem comentar para permitir que outro(s) aluno(s) sugiram novas letras com linhas que se intersectem. Dan exclamou "Eu tenho uma ideia. Lembrem-se que a professora disse que as linhas continuavam por ali fora (infinitamente). [Avançou depressa para o quadro]. Se prolongarmos esta linha [referindo-se ao R de Sara], ela cruzará esta linha [ver figura 6].

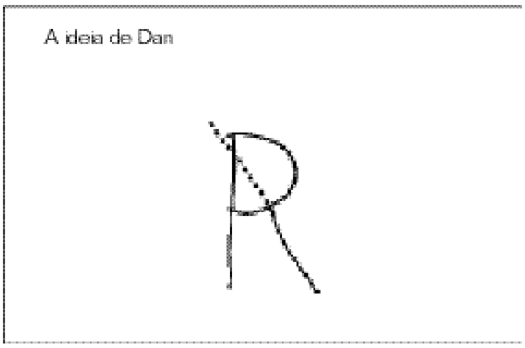

figura 6

Dan expandiu o seu próprio raciocínio. Apesar de os alunos terem previamente discutido as linhas e as suas características e demonstrado que as linhas continuam infinitamente, esta lição constituiu a primeira ocasião de poderem aplicar esta nova ideia. Dan demonstrou que muitas vezes a reflexão leva tempo. Depois de pensar e de reflectir sobre o R de Sara, Dan concebeu um caminho para mostrar que tinha linhas que se intersectavam. Dan utilizou o seu entendimento de linhas "que continuam por ali fora" e prolongou uma das pernas do R.

Dan utilizou a compreensão que tinha do que constitui uma linha e transportou-a para esta nova situação. O seu comportamento reflexivo é um dos que os matemáticos exibem. Os matemáticos muitas vezes reflectem e analisam as suas ideias durante largos períodos de tempo – muitas vezes durante anos. Este tempo de reflexão ajuda-os a alargar o seu próprio conhecimento matemático e o conhecimento partilhado pela comunidade matemática, tal como Dan fez.

A Formulação de Conjecturas e a Justificação de Provas

Outra característica dos matemáticos é que eles formulam conjecturas e empenham-se em prová-las. No exemplo seguinte, Eddie está a aprender a conjecturar e verificar as suas ideias.

Durante vários dias, os alunos estiveram a estudar simetrias. Desenharam ou modelaram os eixos de simetria de várias figuras. Um dia, encontraram os eixos de simetria de triângulos, quadrados e rectângulos. Alguns alunos sugerem que um triângulo equilátero tem três eixos de simetria e que um quadrado tem quatro. Depois de uma longa discussão, os alunos acordaram que um rectângulo, não quadrado, tem somente dois eixos de simetria. De início, muitos alunos pensavam que a diagonal de qualquer rectângulo seria sempre um eixo de simetria.

Ao almoço desse dia, Eddie fala com alguns colegas acerca de uma conjectura a que tinha chegado sobre eixos de simetria de polígonos regulares, ou seja, figuras com lados e ângulos iguais. Eddie pensa que o número de lados de um polígono regular diz-nos o número de eixos de simetria. Vários alunos chamam a professora, dizendo "Venha ouvir a teoria do Eddie". No dia seguinte, Eddie explica como tinha desenvolvido e descoberto uma forma de testar a sua conjectura acerca de eixos de simetria. Desenha exemplos de figuras à medida que explica o seu raciocínio (ver figura 7).

Se um triângulo tem três lados iguais, então tem três eixos de simetria. Se é um quadrado tem quatro lados iguais, logo quatro eixos de simetria. Um pentágono que tem cinco lados iguais, logo tem cinco eixos de simetria. A mesma coisa para o dodecágono [um polígono de doze lados]. Ou faz uma estrela [com] dez lados iguais, então tem dez eixos de simetria.

Eddie formulou uma conjectura e elaborou um plano para verificar a conjectura. Embora não tenha desenvolvido uma prova matemática dedutiva, ele procurou evidência para suportar a sua conjectura. Utilizou o seu conhecimento para descobrir padrões e vê as inter-relações entre os padrões. Eddie também mostrou confiança na sua capacidade de pensar por si acerca desta descoberta. Ele não precisou que a professora validasse o seu pensamento antes de o partilhar com os colegas. Este exemplo mostra que Eddie se está a tornar um resolvedor de problemas activo e confiante. Recolheu evidências para suportar a sua conjectura testando exemplos e observando o padrão. Os matemáticos, muitas vezes, formulam e expandem os seus "pressentimentos" para verificar as suas conjecturas, antes de proporem provas dedutivas, como um passo

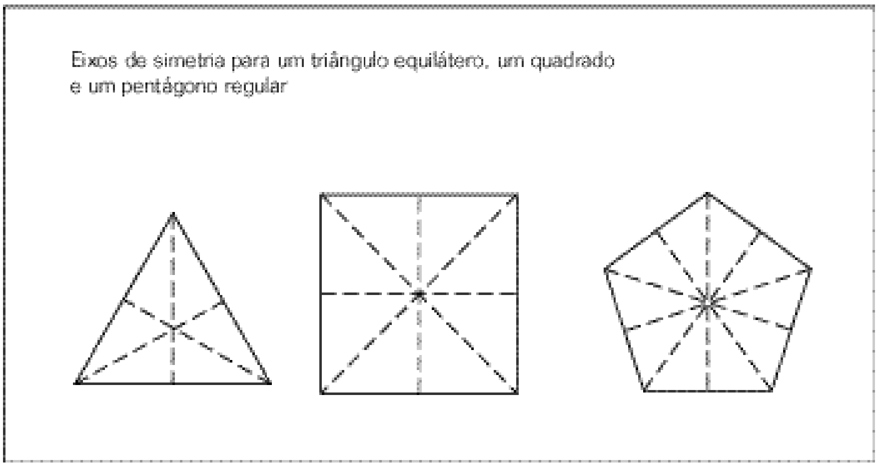

figura 7

final, de validação dessas conjecturas.

Implicações para o Ensino da Matemática

Embora nestes episódios muitos dos diálogos provenham de alunos, a professora desempenhou um papel essencial. Ela envolve consistentemente os alunos na investigação (inquiry). Uma das estratégias mais significativas que observei na abordagem desta professora foi o tipo de problemas que ela escolheu e criou. Estes problemas promoveram a interacção e o diálogo, desafiaram os seus alunos a raciocinar e forneceram um contexto para que fossem recriados os conceitos matemáticos. Estes problemas eram não rotineiros e abertos – os passos para a solução não eram evidentes nem havia utilização directa de algoritmos. Lappan (1193, pág.524) explicou a importância das tarefas matemáticas apropriadas:

Nenhuma outra decisão que o professor toma tem um impacto tão grande nas oportunidades dos alunos aprenderem e na sua percepção acerca do que é a Matemática, como a selecção ou criação das tarefas com que o professor envolve os alunos no estudo da Matemática.

Lampert (1990) sugeriu que um bom problema conduz os alunos a revelarem e analisarem os seus pressupostos acerca da Matemática. Com bons problemas, os professores podem ajudar os alunos a construir uma forma de pensamento, acerca da Matemática, que é rica em poderosas conexões entre conceitos e que ajuda a dar sentido à Matemática. Os bons problemas podem ajudar os alunos a expandir o seu raciocínio para níveis mais elevados – a analisar e a sintetizar o seu conhecimento.

A professora ajudou os alunos a aprenderem a pensar como matemáticos quando os ajudou a interiorizar os atributos do modo de trabalhar dos matemáticos. Facultou situações em que os alunos redescobriram, clarificaram e compreenderam definições e conceitos matemáticos através de múltiplas representações. Ensinou-lhes que a Matemática é um processo sistemático, em que se parte de uma ideia, se verifica se funciona ou não e se faz ligações com outras descobertas. Ao ensinar os alunos a conjecturar e, depois, a defender as suas conjecturas, esta professora ajudou-os a compreender, de certa maneira, a forma de estabelecer a verdade na Matemática. Ela ensinou os seus alunos que a reflexão profunda sobre a Matemática expande o seu pensamento e pode ser recompensada pelos importantes contributos para a comunidade de aprendizagem. Os alunos tiveram experiências positivas com a Matemática. Eles estiveram curiosos e animados, estiveram entusiasmados com as suas descobertas e tornaram-se mais capazes de pensar como matemáticos.

Bibliografia

Lampert, Magdeline. "When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching". American Educational Research Journal 27 (Janeiro 1990): 29-63.

Lappan, Glenda. "What Do We Have and Where Do We Go from Here?" Arithmetic Teacher 40 (Maio 1993): 524-26.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathmatics. Reston. Va.: NCTM, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, Va.:NCTM, 1991.

Steele, Diana F. "A Construtivist Approach to Mathematics Teaching and Learning by a Four-Grade Teacher." Ph.D. diss. University of Florida, 1995. Dissertation Abstracts International (1996): 4309.

Diana F. Steele
Northern Illionois University, Delkab

Traduzido de Teaching Children Mathematics, 7, vol 6, (Março 2000): 464-68.

Diana F. Steele (dsteele@math.niu.edu) lecciona na Northern Illionois University em Dekalb. Os seus interesses de investigação estão dirigidos para o conhecimento de como as crianças aprendem Matemática e como os professores utilizam este conhecimento na sala de aula.

Tradução
Luciano Veia,
Escola Superior de Educação,
Universidade do Algarve

Revisão
Fátima Guimarães,
Escola Básica 2,3 Telheiras
Lina Brunheira,
Universidade de Lisboa