4.4. Transformações geométricas em R^3

Seguem-se algumas breves indicações sobre as transformações geométricas no espaço tridimensional.[15] É preciso algum cuidado na abordagem deste tópico com alunos, no ensino secundário, pois embora intuitivamente existam analogias evidentes entre plano e espaço, como veremos, poderá surgir alguma confusão quanto a nomenclatura. Por essa razão, enquanto se pode advogar que no caso da geometria sintética e da geometria analítica o estudo do espaço e do plano deve ir a par, já no caso das transformações geométricas será prudente deixar que os conceitos no plano estejam já numa fase adiantada de construção, na mente dos alunos, antes de abordar conceitos análogos no espaço.

Isometrias no espaço. A noção de isometria no espaço é idêntica à do plano: trata-se de uma transformação $\boldsymbol{T}$ de R^3 sobre si mesmo que respeita a noção de distância, ou seja, se A e B são dois pontos quaisquer de R^3, $\text{dist}(\boldsymbol{T}(A),\boldsymbol{T}(B)) = \text{dist}(A,B)$. As isometrias em R^3 formam um grupo.

Recordemos que uma transformação **T** *é uma involução se* $\mathbf{T}^2$ *é igual à transformação idêntica.*

Reflexão. Dado um plano α, chama-se *reflexão* relativa ao plano α a transformação $\boldsymbol{T}$ de R^3 sobre si mesmo tal que, se A for um ponto qualquer de R^3, α é o plano mediador do segmento AA', com $A' = \boldsymbol{T}(A)$. A reflexão é uma isometria. Tal como no plano, a reflexão espacial é uma involução. Os pontos fixos da reflexão são os pontos do plano α. As rectas fixas da reflexão são as rectas perpendiculares ao plano α. Os planos fixos para a reflexão são o próprio plano α e os planos perpendiculares a α.

Translação. A definição de translação no espaço é análoga à do plano, sendo agora $\vec{v}$ um vector em R^3. A translação não tem pontos fixos; as rectas e planos fixos são respectivamente as rectas e planos paralelos a $\vec{v}$.

Rotação. Seja e um eixo (recta orientada) e θ um ângulo orientado. Diz-se *rotação* de eixo e e amplitude θ a transformação de R^3 sobre si mesmo que deixa invariantes os pontos de e e faz corresponder, a cada ponto A de R^3 não pertencente a e , o ponto A', situado no plano α perpendicular a e e passando por A , e tal que, se for O o ponto de intersecção de e com α, os segmentos AO e $A'O$ são iguais e o ângulo orientado AOA' é igual a θ. Se $\theta = 360°$ (ou é um múltiplo de 360°), a rotação reduz-se à transformação idêntica. A transformação inversa de uma rotação de eixo e e amplitude θ é a rotação de eixo e e amplitude $-\theta$. Os pontos fixos da rotação são os pontos do eixo de rotação. Existe uma única recta fixa, o próprio eixo de rotação. Os planos fixos são, no caso geral, apenas os planos perpendiculares ao eixo de rotação. Se $\theta = 180°$, a rotação toma o nome de *meia-volta* e os planos contendo o eixo de rotação também são fixos.

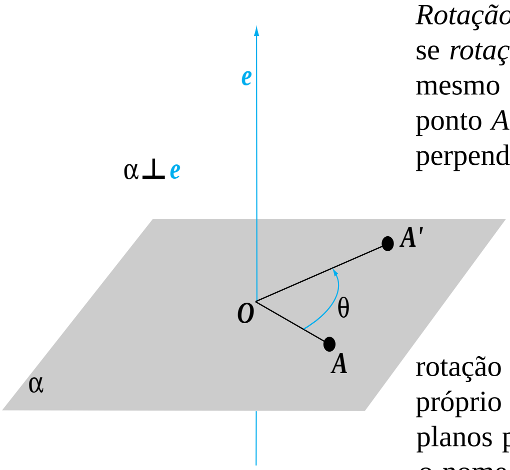


Figura 33

As translações, rotações e seus produtos chamam-se *deslocamentos*.

Os deslocamentos formam um subgrupo do grupo das isometrias.

Se α e β são dois planos oblíquos, o produto das reflexões $\boldsymbol{T}_\alpha$ e $\boldsymbol{T}_\beta$ é uma rotação cujo eixo é a intersecção dos dois planos e cuja amplitude é o dobro da amplitude do diedro formado pelos planos α e β.

Se α e β são dois planos paralelos, o produto das reflexões $\boldsymbol{T}_\alpha$ e $\boldsymbol{T}_\beta$ é uma translação cujo vector tem direcção perpendicular aos planos α e β, sentido de α para β, e norma igual ao dobro da distância entre os planos α e β.

Tal como no plano foi conveniente identificar, para além da reflexão, da translação e da rotação, uma outra isometria, chamada reflexão deslizante, para obter um resultado completo na classificação das isometrias no plano (ver pág. 72), também no espaço se torna conveniente identificar outras isometrias que são produtos particulares das transformações anteriores.

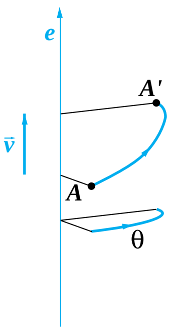


Figura 34. O parafuso, uma isometria no espaço.

Parafuso. Um (movimento em) *parafuso* é uma transformação de $\mathbb{R}^3$ sobre si mesmo que resulta do produto de uma translação por uma rotação em torno de um eixo *e* paralelo ao vector da translação. A esta transformação também se chama por vezes *rotação deslizante* ou *deslocamento helicoidal*.

Reflexão deslizante. Seja α um plano, $\vec{v}$ um vector paralelo a α e $\boldsymbol{R}_\alpha$ e $\boldsymbol{T}_{\vec{v}}$ a reflexão e translação correspondentes. A transformação $\boldsymbol{T}_{\vec{v}} \circ \boldsymbol{R}_\alpha$ diz-se *reflexão deslizante* a respeito do plano α e do vector $\vec{v}$ (fig. 35).

Reflexão rotativa. Seja α um plano e *e* um eixo perpendicular a α. Seja ainda θ um ângulo orientado. Designemos por $\boldsymbol{T}_\alpha$ e $\boldsymbol{R}_{e,\theta}$ a reflexão e rotação correspondentes. A transformação $\boldsymbol{R}_{e,\theta} \circ \boldsymbol{T}_\alpha$ diz-se *reflexão rotativa* a respeito do plano α e do eixo *e* (fig. 36).

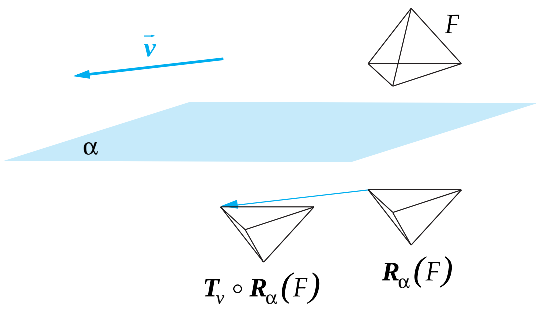


Figura 35. A reflexão deslizante no espaço.

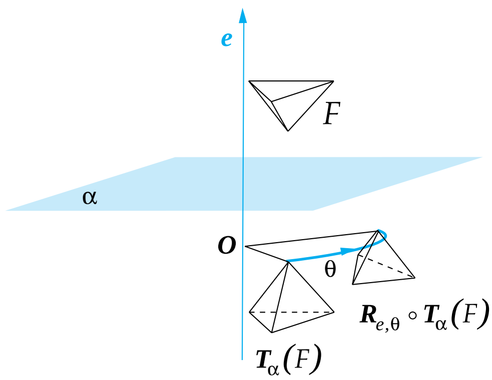
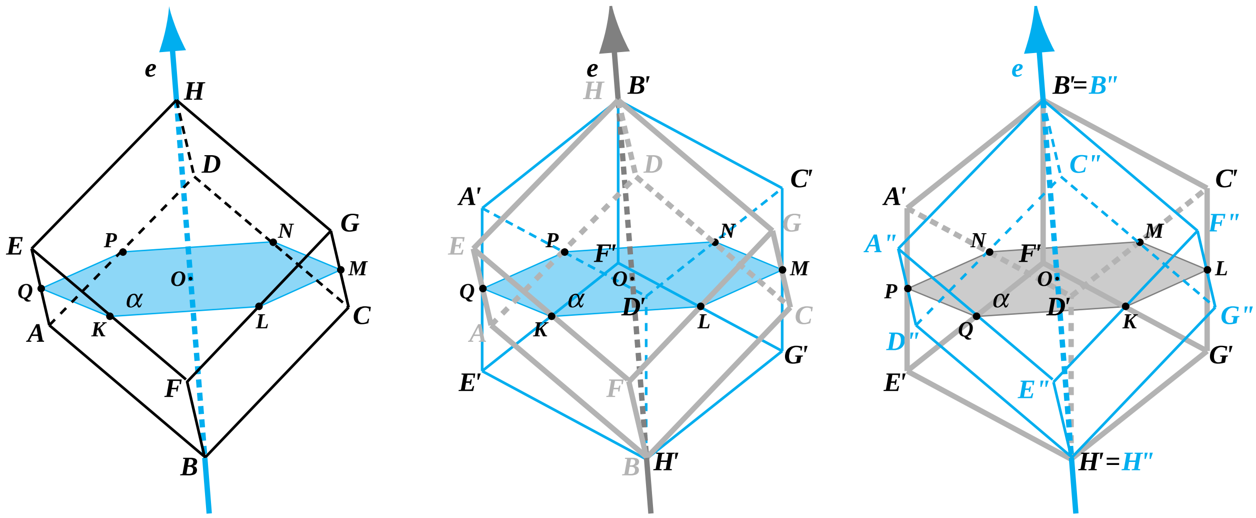


Figura 36. A reflexão rotativa.

Poliedros e reflexões rotativas. Veremos no cap. IV, Simetria, que uma transformação de simetria de um poliedro é uma isometria que deixa o poliedro invariante (como subconjunto de R^3). Na fig. 37 podemos ver que o cubo admite reflexões rotativas como transformações de simetria.



A. Partimos de um cubo *ABCDEFGH* e vamos efectuar uma reflexão rotativa cujo plano α é o do hexágono *KLMNPQ* (cujos lados unem os pontos médios das arestas *EF, FG, GC, CD, DA* e *AE*). O eixo é uma recta *e* perpendicular a α e passando pelo centro *O* do cubo.

B. Efectuamos primeiro a reflexão relativa ao plano a, obtendo o cubo, a cor, *A'B'C'D'E'F'G'H'*. Os únicos pontos fixos do cubo para esta transformação são os vértices do hexágono *KLMNPQ*. Em cinzento está desenhado o cubo de que partimos.

C. Efectuando agora uma rotação de 60º de eixo *e*, obtemos o cubo *A"B"C"D"E"F"G"H"*, coincidente com o cubo de partida. Os pontos fixos nesta rotação são os do eixo, *B'* e *H'*.

Figura 37

Inversão central. Seja *M* um ponto. Diz-se *inversão central* ***T*** de centro *M* a transformação de R^3 sobre si mesmo que faz corresponder a qualquer ponto *A* o ponto *A'* tal que *M* é o ponto médio do segmento *AA'*. A inversão central também se chama por vezes *reflexão pontual ou reflexão central* (em R^3).

Classificação das isometrias no espaço. Duas figuras *F* e *F′* no espaço dizem-se *congruentes* se existe uma isometria ***T*** tal que ***T***(*F*) = *F′*. Se essa isometria é um deslocamento, temos uma congruência directa. Se não, prova-se que é o produto de um deslocamento por uma reflexão e temos uma congruência inversa.

Paralelamente ao teorema da classificação das isometrias no plano (pág. 72), demonstra-se o seguinte teorema de classificação das isometrias no espaço:

Uma isometria no espaço é exactamente uma das transformações seguintes: translação, rotação, parafuso, reflexão, reflexão deslizante, reflexão rotativa.

Dilações e semelhanças. As noções de dilação e semelhança no plano estendem-se imediatamente ao espaço, sem qualquer dificuldade.